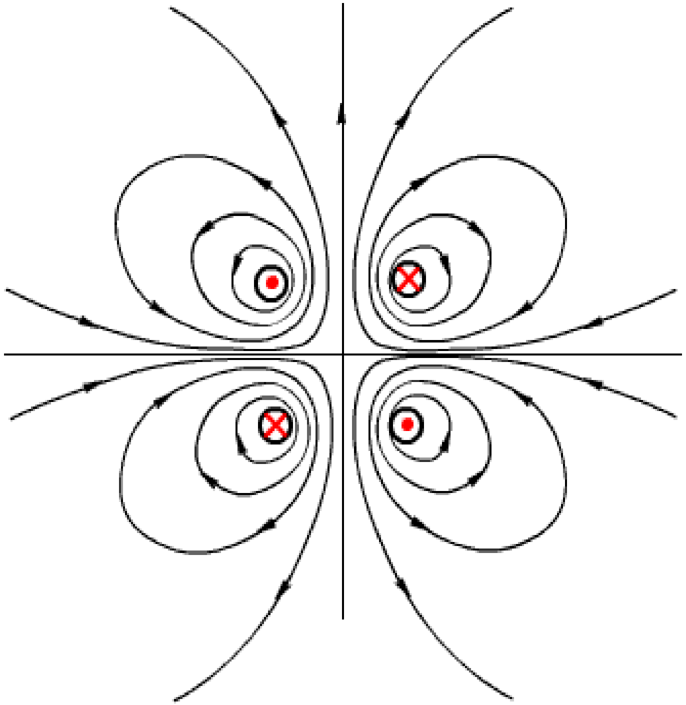
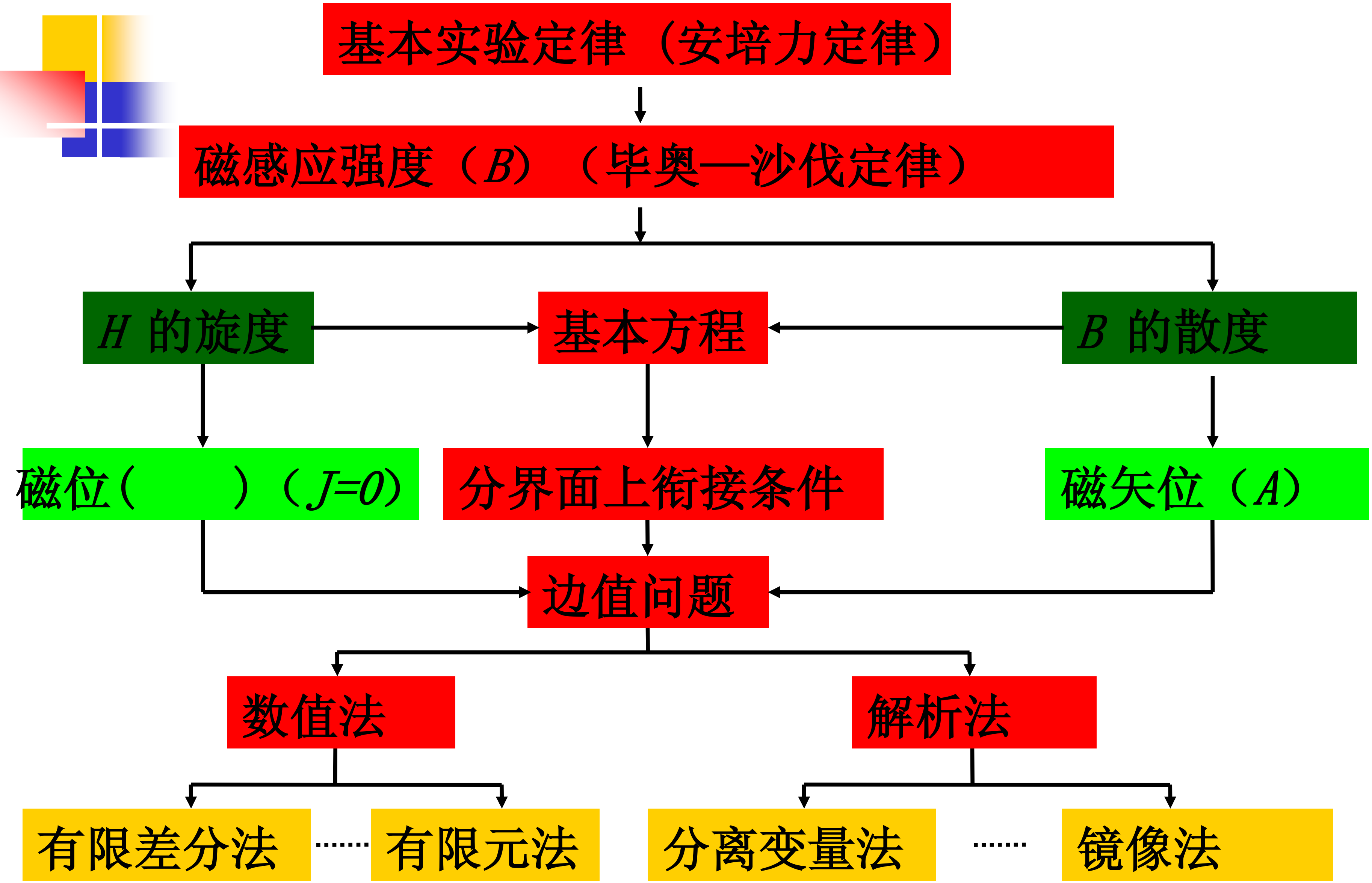
第四章 恒定磁场

本章目录：

§ 4.1 恒定磁场的基本规律
§ 4.2 矢量磁位
§ 4.3 矢量磁位的多极展开
§ 4.4 磁介质中的恒定磁场





基本实验定律（安培力定律）
磁感应强度（B）（毕奥—沙伐定律）
H 的旋度
基本方程
B 的散度
磁位（ ）（J=0）
分界面上衔接条件
磁矢位（A）
边值问题
数值法
解析法
有限差分法
……
有限元法
分离变量法
……
镜像法

恒定磁场知识结构框图

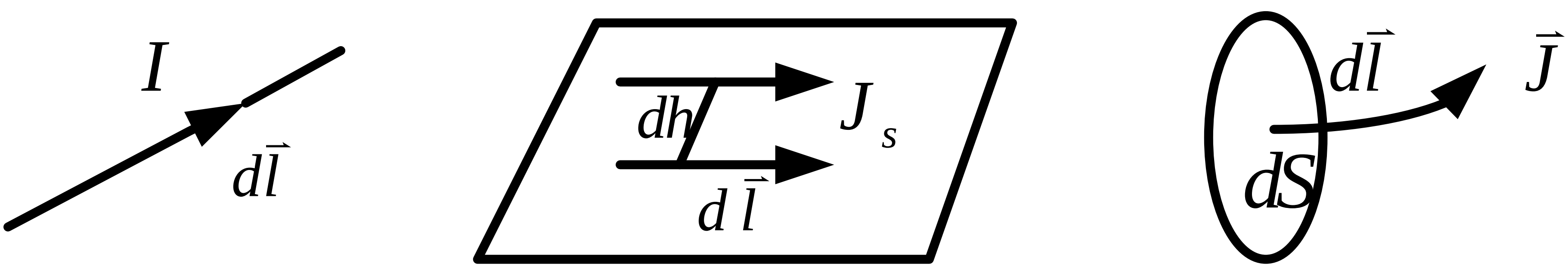
§4.1恒定磁场的基本规律

一、电流元与磁感应强度

线电流元：$I d\vec{l}$　　其中$\vec{l}$为电流方向

面电流元：$J_s dh d\vec{l} = \vec{J}_s ds$

体电流元：$J dS d\vec{l} = \vec{J} dV$



§ 4.1恒定磁场的基本规律

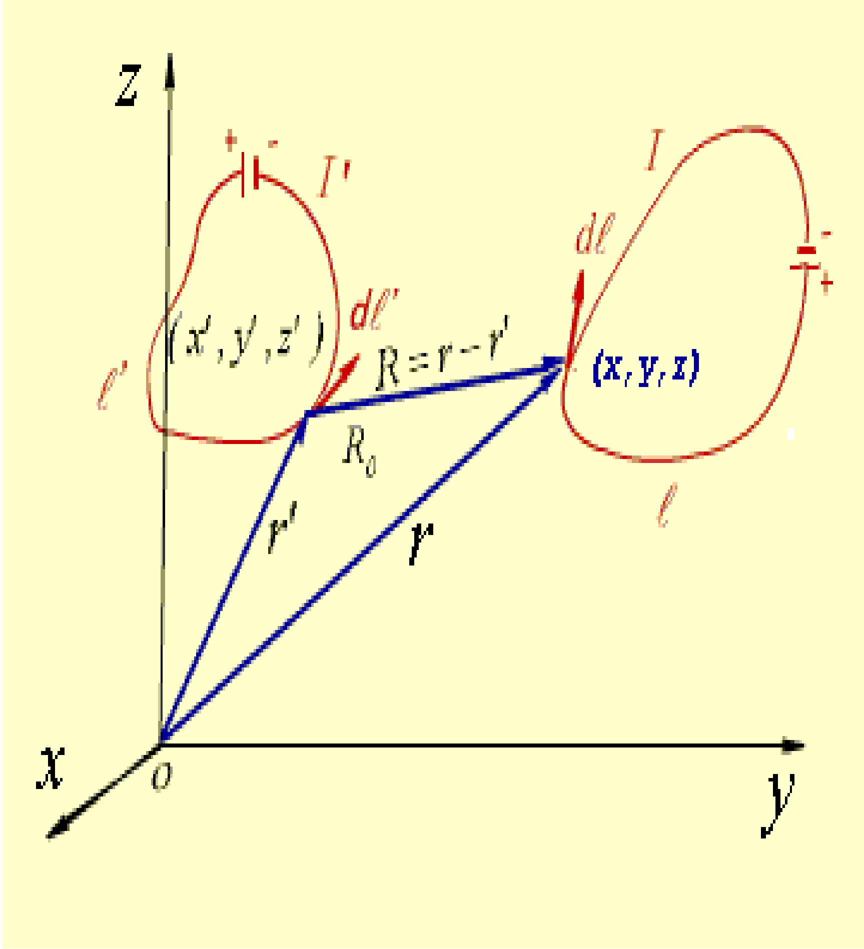
安培力定律
(Ampere's force Law)

电流 I' 的回路对电流 I 回路的作用力

$$\vec{F}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l\oint_{l'}\frac{I d\vec{l}\times(I' d\vec{l}'\times\hat{R})}{R^2}$$

式中真空中的磁导率：

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\quad（H/\mathrm{m}）$$



两载流回路间的相互作用力

§ 4.1恒定磁场的基本规律

电流之间相互作用力通过磁场传递。

$$\vec{F}=\oint_{l} I d\vec{l}\times\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I' d\vec{l}'\times\hat{R}}{R^2}$$

$$=\oint_{l} I d\vec{l}\times\vec{B}$$

定义：当把任意给定方向的实验电流元$I_0 d\vec{l}$放入磁场中，电流元与$\vec{B}$的矢量叉乘等于电流元所受的力$d\vec{F}$（$\because$ 是实验电流元，放入后不影响$\vec{B}$），即$d\vec{F}=I_0 d\vec{l}\times\vec{B}$

§ 4.1恒定磁场的基本规律

二、比奥-萨伐尔定律

由实验得到：

线电流：$\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_l \dfrac{I d\vec{l}^{'} \times \vec{R}}{R^3}$

面电流：$\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_S \dfrac{\vec{J}_S dS^{'} \times \vec{R}}{R^3}$

体电流：$\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_V \dfrac{\vec{J} \times \vec{R}}{R^3} dV^{'}$

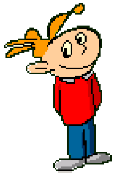
其中$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}^{'}$，

$\vec{B}$称为磁感应强度

单位为：T（特斯拉）

Wb/m^2（韦伯/平方米）

§4.1恒定磁场的基本规律



讨论与引伸

1）适用条件：无限大均匀媒质(μ)，且电流分布在有限区域内。

2）由毕奥—沙伐定律可以导出恒定磁场的基本方程（$\vec{B}$的散度与旋度）。

例题参见书上P113页例1—例3

§ 4.1恒定磁场的基本规律

三、磁感应强度的远区特性

当电流分布在有限空间，

且观察点趋向于无穷远（$\vec{r} \to \infty$）时

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}(\vec{r}\,')\times\frac{\vec{R}}{R^3}dV' \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$$

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{\vec{r}}{r^3} + O(\frac{1}{r^3})$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}[\{\int_V \vec{J}(\vec{r}\,')dV'\}\times\frac{\vec{r}}{r^3} + O(\frac{1}{r^3})]$$

§ 4.1恒定磁场的基本规律

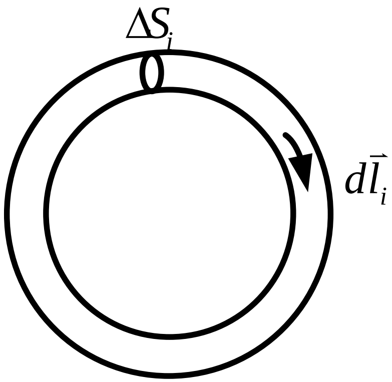
证明：$\because \nabla\cdot\vec{J}=0$，同时电流分布在有限空间，因此电流线在有限空间是闭合的，可将体积分分解成无数个闭合的电流管分别进行积分，电流管即数学中的矢量管，矢量管表面的切线方向即为矢量线的方向。

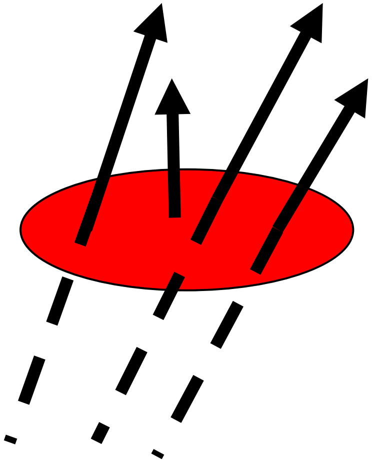
$$\int_V \vec{J}(\vec{r}')dV' = \lim_{\Delta S_i(l_i)\to 0}\sum_i \oint_{l_i}\int_{\Delta S_i}\vec{J}dS_i dl_i$$

$$= \lim_{\Delta S_i(l_i)\to 0}\sum_i \oint_{l_i}[\int_{\Delta S_i}\vec{J}\cdot\hat{l}_i dS_i]d\vec{l}_i$$

$$= \lim_{\Delta S_i(l_i)\to 0}\sum_i [\int_{\Delta S_i}\vec{J}\cdot\hat{l}_i dS_i]\oint_{l_i}d\vec{l}_i$$

$$=0$$





注：ΔS_i即为横截面积，可随l_i变化

其中 $\vec{J}=J\hat{J}=J\left(\hat{J}\cdot\hat{l}_i\right)\hat{l}_i=\left(\vec{J}\cdot\hat{l}\right)\hat{l}_i$

§ 4.1恒定磁场的基本规律

$$\therefore \vec{B} = O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

所以磁感应强度$\vec{B}$的零级近似为0(即忽略尺寸)

物理意义：$\vec{B}$没有磁荷或者说没有通量源（与静电场类比）

由于零级近似为零，所以无限远处$\vec{B}$比$\vec{E}$小一个数量级

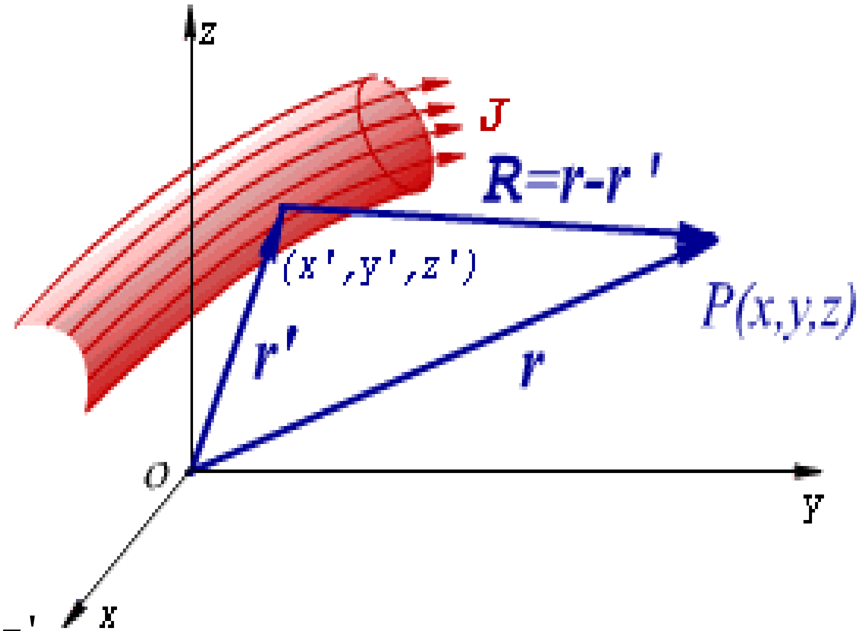
可表示为$\vec{B} = O\left(\frac{1}{r^3}\right)$ = 磁偶极距产生的场+$O\left(\frac{1}{r^4}\right)$

§ 4.1恒定磁场的基本规律

四、基本方程

1. 恒定磁场的散度

由*Biot-Savart Law* 两边取散度：



$$\nabla\cdot\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r}^{\,'})\times\vec{R}}{R^3}dV^{'}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\cdot\left[\vec{J}(\vec{r}^{\,'})\times\nabla(\frac{1}{R})\right]dV'$$

体电流的磁场

§ 4.1恒定磁场的基本规律

矢量恒等式 $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{C}$

$$\nabla\cdot\left[\vec{J}(\vec{r}^{\,'})\times\nabla(\frac{1}{R})\right]$$

$$=\nabla(\frac{1}{R})\cdot\nabla\times\vec{J}(\vec{r}^{\,'})-\vec{J}(\vec{r}^{\,'})\cdot\nabla\times\left[\nabla(\frac{1}{R})\right]=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

表明 $\vec{B}$ 是无头无尾的闭合线，恒定磁场是无源场。（在任意媒质中均成立）。可以作为判断一个矢量场能否成为恒定磁场的必要条件。

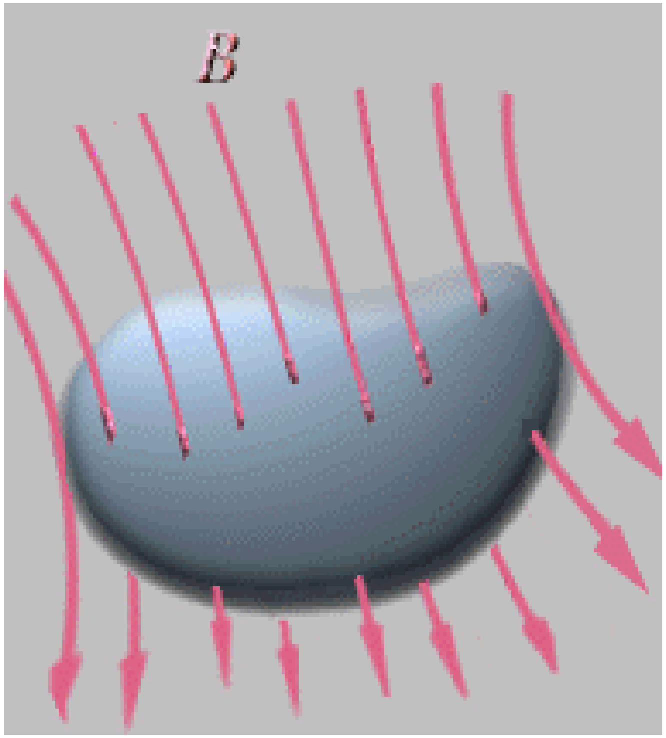
§ 4.1恒定磁场的基本规律

2. 磁场的高斯定律

$$\because \quad \nabla \cdot \vec{B} \equiv 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV \xlongequal{\text{散度定理}} \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

这说明磁场通过任意闭合面的磁通量为零，称之为磁通连续性原理，或称磁场中的高斯定律（Gauss’s Law for the Magnetic field）。

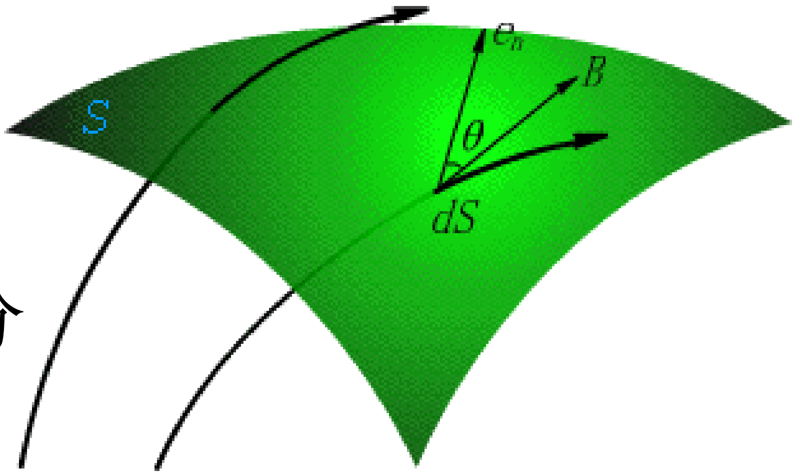


磁通连续性原理

§ 4.1恒定磁场的基本规律

穿过一个非闭合面的磁通：$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$ (韦伯)

3. 磁力线



$\vec{B}$的通量Φ

仿照静电场的$\vec{E}$线，恒定磁场可以用$\vec{B}$线描绘，$\vec{B}$线的微分方程

$$\vec{B} \times d\vec{l} = 0$$

在直角坐标系中

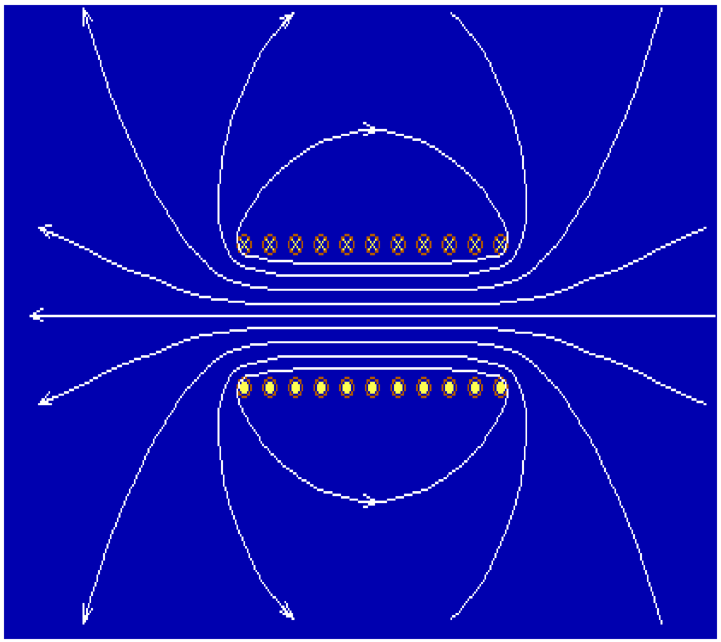
$$\frac{B_x}{dx} = \frac{B_y}{dy} = \frac{B_z}{dz}$$

§ 4.1恒定磁场的基本规律

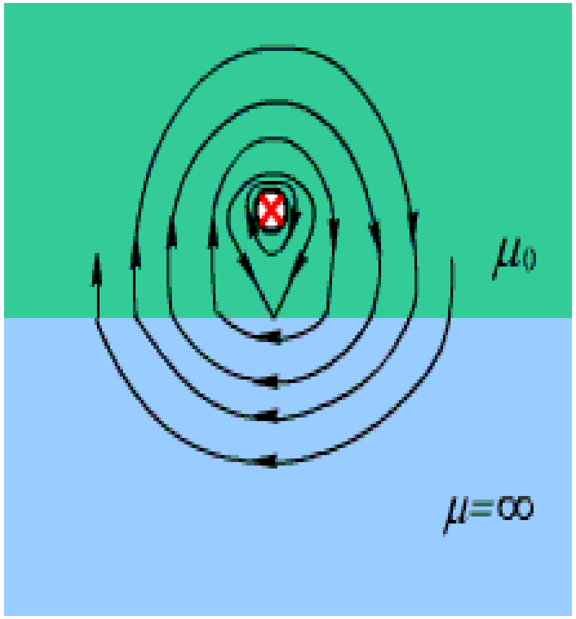
磁力线的性质：

- 磁力线是闭合的曲线；
- 磁力线不能相交 (除 $B = 0$ 外);
- 闭合的磁力线与交链的电流成右手螺旋关系
- 磁感应强度越强处，磁力线越稠密，反之，越稀疏。

§ 4.1恒定磁场的基本规律

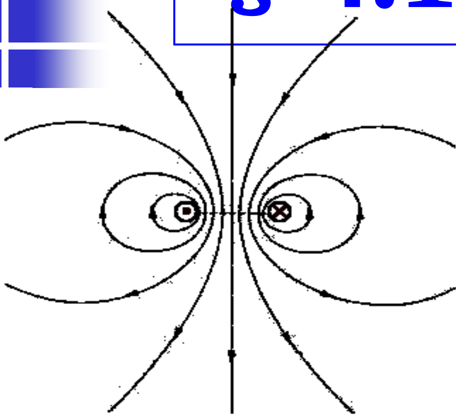


长直螺线管磁场的分布

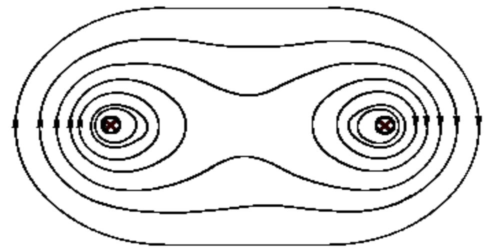


一载流导线 I 位于无限大铁板上方的磁场分布

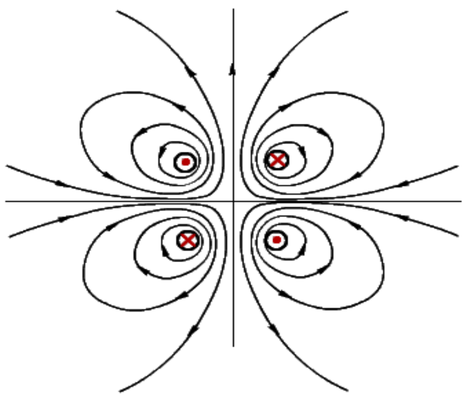
§4.1恒定磁场的基本规律



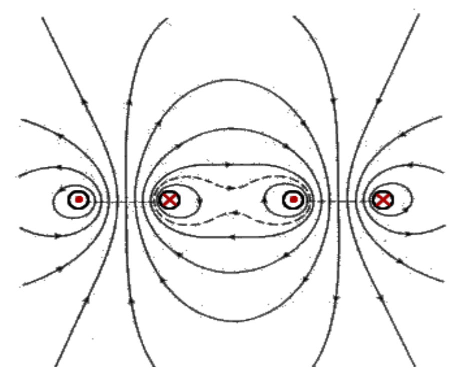
两根异向长直流导线的磁场分布



两根相同方向长直流导线的磁场分布



两对上下放置传输线的磁场分布



两对平行放置传输线的磁场分布

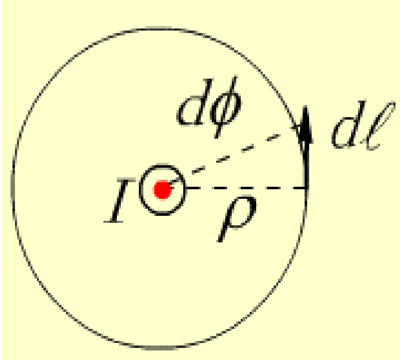
§ 4.1恒定磁场的基本规律

4. 安培环路定律（真空）

以长直导线的磁场为例 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$

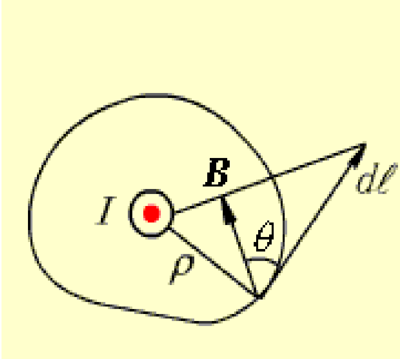
（1）安培环路与磁力线重合

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_0^{2\pi}\frac{\mu I_0}{2\pi\rho}\rho d\varphi=\mu_0 I$$



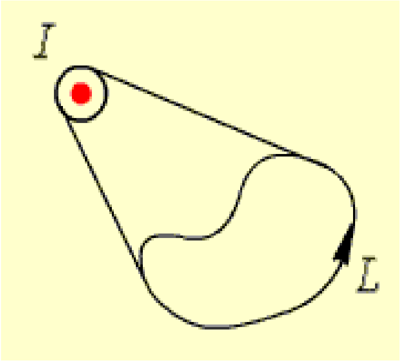
（2）安培环路与磁力线不重合

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_L B\cos\theta dl=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\rho d\varphi=\mu_0 I$$



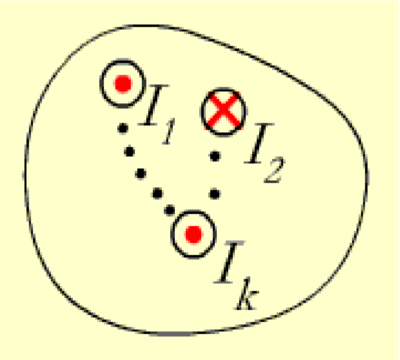
§4.1恒定磁场的基本规律

（3）安培环路不交链电流



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_L B\cos\theta dl = \int_0^0 \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\rho d\varphi = 0$$

（4）安培环路与若干根电流交链



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_k$$

该结论适用于其它任何带电体情况。

强调：环路方向与电流方向成右手，

电流取正，否则取负。

§ 4.1恒定磁场的基本规律

由*Stokes*定律可以推出$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$

当然也可直接由毕奥－沙伐尔定律两边求叉乘得到！

静磁场的核心物理规律是毕奥－沙伐尔定律

其基本方程为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0\text{（磁力线闭合，不中断）}\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}\text{（磁感应强度的旋度为电流密度）}\end{cases}$$

§ 4.1恒定磁场的基本规律

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \text{（磁场的高斯定律）} \\ \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \text{（静磁场的安培环路定律）} \end{cases}$$

（若$\nabla\cdot\vec{J}\neq 0$，则$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$不成立，

因为$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=\mu_0\nabla\cdot\vec{J}=0$，矛盾！

同样$\nabla\cdot\vec{J}\neq 0$，积分形式亦不成立，

因为*Stokes*定律中*S*任意）

§4.1恒定磁场的基本规律

使用安培环路定律计算$\vec{B}$

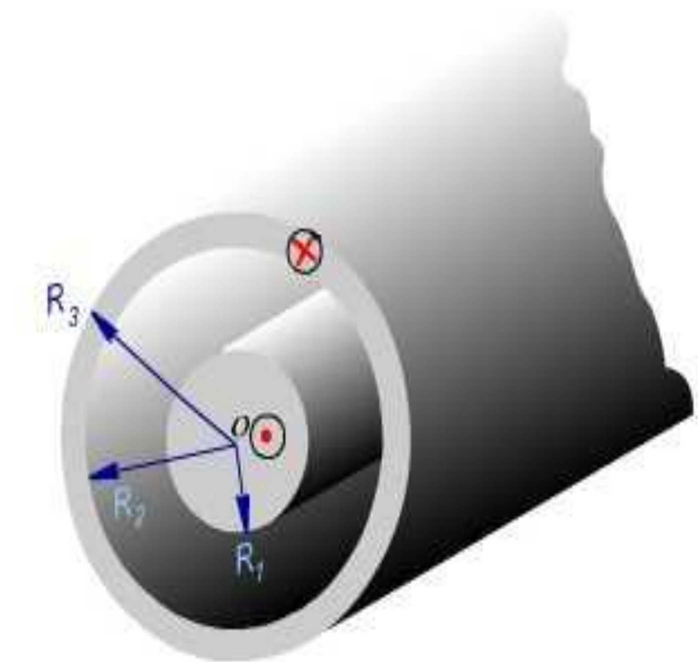
①所选闭合的积分路径L上每一点的$\vec{B}$只有切向分量

②切向分量的大小相等

例　试求载流无限长同轴电缆产生的磁感应强度。

解：这是平行平面磁场，选用圆柱坐标系，

$$\vec{B} = B(\rho)\hat{\phi}$$



同轴电缆截面

§ 4.1恒定磁场的基本规律

①$0 \le \rho < R_1$时取安培环路$(\rho < R_1)$，交链的部分电流为

$$I' = \frac{I}{\pi R_1^2} \cdot \pi\rho^2 = I\frac{\rho^2}{R_1^2}$$

应用安培定律可知

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B\rho d\phi = \mu_0 \frac{I\rho^2}{R_1^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2}\hat{\phi} \qquad (1)$$

§ 4.1恒定磁场的基本规律

②$R_1 \le \rho < R_2$时$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B\rho d\phi = \mu_0 I$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\phi} \qquad （2）$$

③$R_2 \le \rho < R_3,$ 这时穿过半径为ρ 的圆面积的电流为

$$I' = I - I\frac{\rho^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = I\frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

应用安培环路定律，得

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B\rho d\phi = \frac{\mu_0 I(R_3^2 - \rho^2)}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\cdot\frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R^2}\hat{\phi} \qquad （3）$$

§ 4.1恒定磁场的基本规律

④$R_3 \le \rho < \infty$

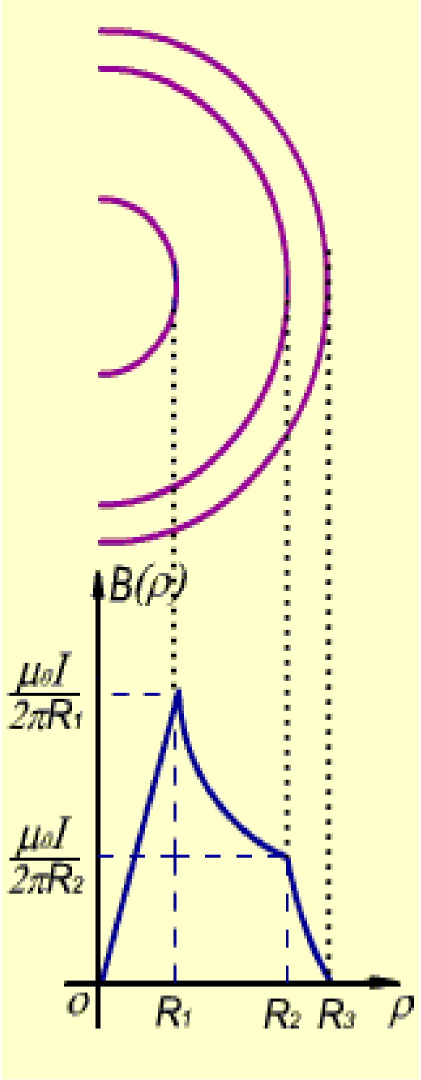
$$\vec{B} = 0 \qquad (4)$$

$\vec{B}(\rho)$的分布图如右图所示

对于某些对称性的磁场，

可以方便地应用安培环路

定律得到$\vec{B}$的解析表达式



同轴电缆的磁场分布

§4.1恒定磁场的基本规律

5. 洛伦兹力（*Lorentz*）

描述电荷在电磁场中所受到的力$\vec{F}$,

一般考虑电荷有一运动速度

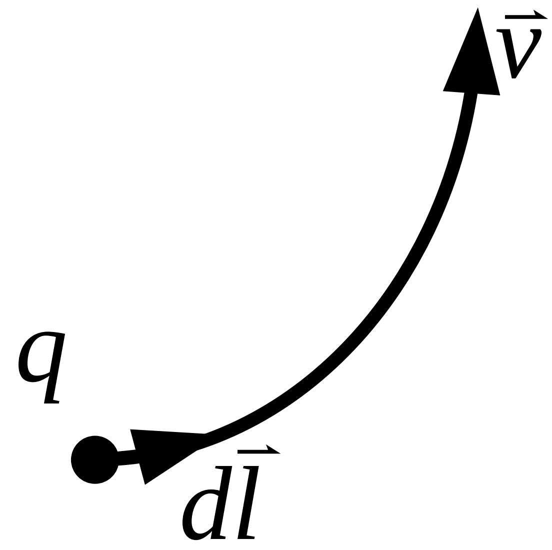
$$\vec{F} = q\vec{E} + Id\vec{l} \times \vec{B}$$

由于$I = \dfrac{q}{dt}$，所以电流在某一固定时刻t,

仅在一点上有：

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

可以看出磁场对运动电荷不做功



§ 4.2 矢量磁位

引入：因为$\nabla\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

$\vec{A}$称磁矢位(Magnetic vector potential)，单位： wb/m（韦伯/米）。

注意：$\vec{A}$不是唯一的，由$Helmholtz$定律，一个矢量场$\vec{A}$只有给定了它的旋度和散度，才能确定。现只规定了它的旋度等于磁感应强度$\vec{B}$，并未规定其散度，所以不能唯一确定

§ 4.2 矢量磁位

如： $\left.\begin{aligned}\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}'\end{aligned}\right\}\Rightarrow 0=\nabla\times(\vec{A}-\vec{A}')\Rightarrow\vec{A}-\vec{A}'=\nabla f$

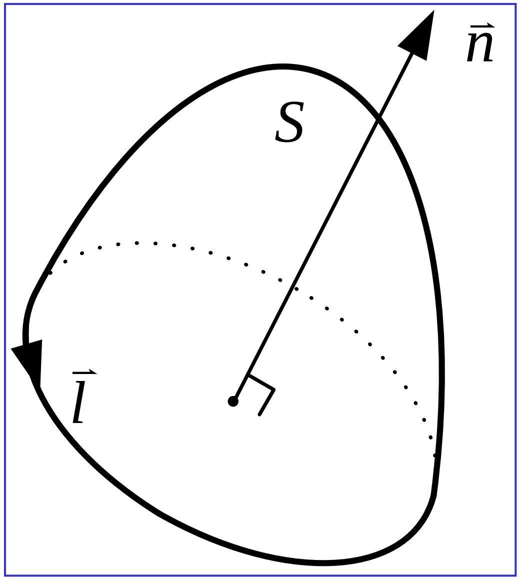
其中f为任意标量

$\therefore\vec{A}=\vec{A}'+\nabla f$（规范变换）

即将上式看作一个由$\vec{A}$到$\vec{A}'$的变换，称该变换为规范变换；

所谓规范变换就是指在该变换下，矢量位、标量位描述的电磁场不变。

§ 4.2 矢量磁位



为能确定$\vec{A}$，须人为地规定$\vec{A}$的散度

如规定$\nabla\cdot\vec{A}=0$ $\rightarrow$ 库仑条件（库仑规范）

则$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}\Rightarrow\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\mu_0\vec{J}$

$$\xRightarrow{\nabla\cdot\vec{A}=0}\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\oint_l\vec{A}\cdot d\vec{l}=\int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

（即为磁通量）

$\vec{A}$的环路积分代表磁场穿过以l为边界的曲面的通量

（曲面S形状任意）

§ 4.2 矢量磁位

$\vec{A}$的表达式：

条件：①规定$\nabla\cdot\vec{A}=0$（此时表达式最简单）

②电流分布在有限区域，规定$\vec{A}\big|_{\infty}=0$

由$\left.\begin{aligned}\nabla^2 A_x=\mu_0 J_x,\ \ \nabla^2 A_y=\mu_0 J_y,\ \ \nabla^2 A_z=\mu_0 J_z\\ \vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}\end{aligned}\right\}$

$$\Rightarrow \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}}{R}dV'$$

同理可得$\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_S\frac{\vec{J}_s dS'}{R}$，$\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_l\frac{Id\vec{l}'}{R}$

§ 4.3 矢量磁位的多极展开

电流分布在有限区域，$r\to\infty$时

$$\because f(\vec{r}-\vec{r}')=f(\vec{r})-(\vec{r}'\cdot\nabla)f(\vec{r})+\frac{1}{2}(\vec{r}'\cdot\nabla)^2 f(\vec{r})+\cdots$$

$$\therefore \frac{1}{R}=\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}=\frac{1}{r}-(\vec{r}'\cdot\nabla)\frac{1}{r}+\frac{1}{2}(\vec{r}'\cdot\nabla)^2\frac{1}{r}+\cdots$$

$$=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3}+O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

带入 $\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V\frac{\vec{J}}{R}dV'$

§ 4.3 矢量磁位的多极展开

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}}{R}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V\vec{J}dV'+\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_V\vec{J}\left(\vec{r}'\cdot\vec{r}\right)dV'+O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\vec{m}\times\vec{r})$$

其中$\vec{m}=\frac{1}{2}\int_V\vec{r}'\times\vec{J}dV'$，电流分布的磁偶极距

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times(\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3})=\frac{\mu_0}{4\pi}[\vec{m}(\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3})-(\vec{m}\cdot\nabla)\frac{\vec{r}}{r^3}]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}[-(\vec{m}\cdot\nabla\frac{1}{r^3})\vec{r}-\frac{1}{r^3}(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{r}]$$

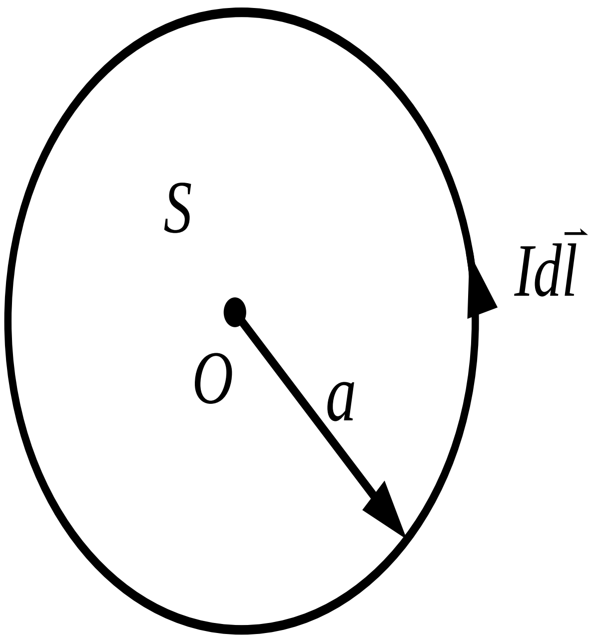
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}]$$

§ 4.3 矢量磁位的多极展开

磁偶极距的大小与坐标原点的选择无关

电偶极距产生的场$\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\dfrac{\vec{p}}{r^3}]$

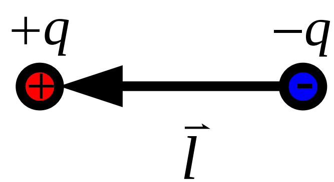
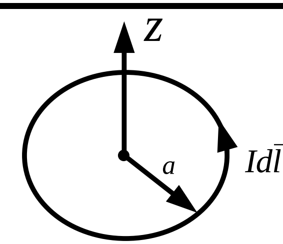
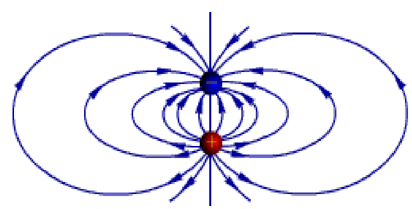
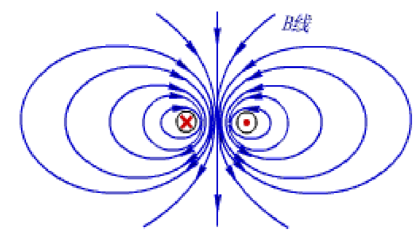
例：半径为a的圆电流线圈的磁偶极距$\vec{m}$



解：由$\vec{m}=\dfrac{1}{2}\oint_l \vec{r}\times Id\vec{l}$，显然$\vec{m}=m\hat{z}$

$$m=\frac{I}{2}\int_0^{2\pi} a\cdot a d\theta = I\pi a^2 = IS, \therefore \vec{m}=IS\hat{z}$$

§ 4.3 矢量磁位的多极展开

	电偶极子	磁偶极子
模型	 $\vec{P} = q\vec{l}$	 $\vec{m} = \pi a^2 I\hat{z}$
条件	① $\vec{r} \to \infty$ 或② $l \to 0, q \to \infty$ 但 $\lim\limits_{l\to 0} ql = P$	① $\vec{r} \to \infty$ 或② $a \to 0, I \to \infty$ 但 $\lim\limits_{a\to 0} \pi a^2 I = m$
产生的电场与磁场		
电量	$\rho_b = -\nabla\bullet\vec{P}(r)$ $\rho_{sb} = \hat{n}\bullet\vec{P}(r)$	$\vec{J}_m = \nabla\times\vec{M}$ $\vec{J}_{sm} = \vec{M}\times\hat{n}$

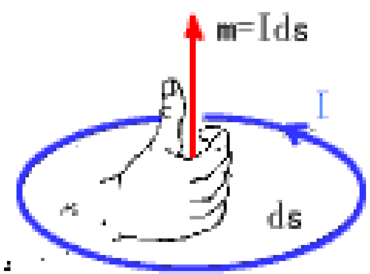
§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

一、磁介质的磁化和磁化强度

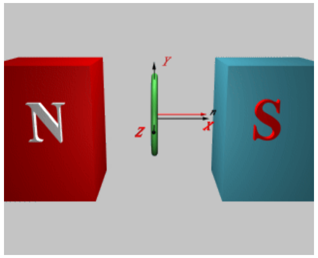
所谓磁介质：是对磁场产生影响的一类介质

磁化的原因：物质的原子或分子中的电子的自旋、电子绕核做轨道运动、原子核的自旋。

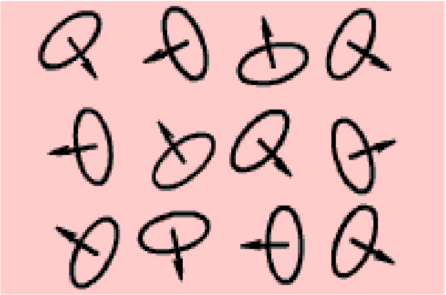
媒质的磁化产生的物理现象和分析方法与静电场媒质的极化类同。



磁偶极子



磁偶极子受磁场力而转动



§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

分类：

顺磁性介质：单个分子的偶极距不为零，但杂乱无章，宏观为零；在外场的作用下，宏观排列倾向于磁场方向。

抗磁性介质：单个分子的偶极距为零，宏观为零；在外场的作用下，宏观排列与磁场方向相反。

铁磁性介质：可划分为许多小区域，各个区域有排列规则，不同区域的取向不同，不加外场时宏观效果不为零，或者说可以产生磁场。

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

不论哪种磁化，从产生磁场的角度是等价的，
可用磁化强度描述：

磁化强度：$\vec{M}=\dfrac{d\vec{m}}{dV}$ 定义为介质中单位体积的偶极距

把电介质看成由电偶极距组成 $\Leftrightarrow$ 把电介质看成由极化电荷组成
把磁介质看成由磁偶极距组成 $\Leftrightarrow$ 把磁介质看成由磁化电流组成

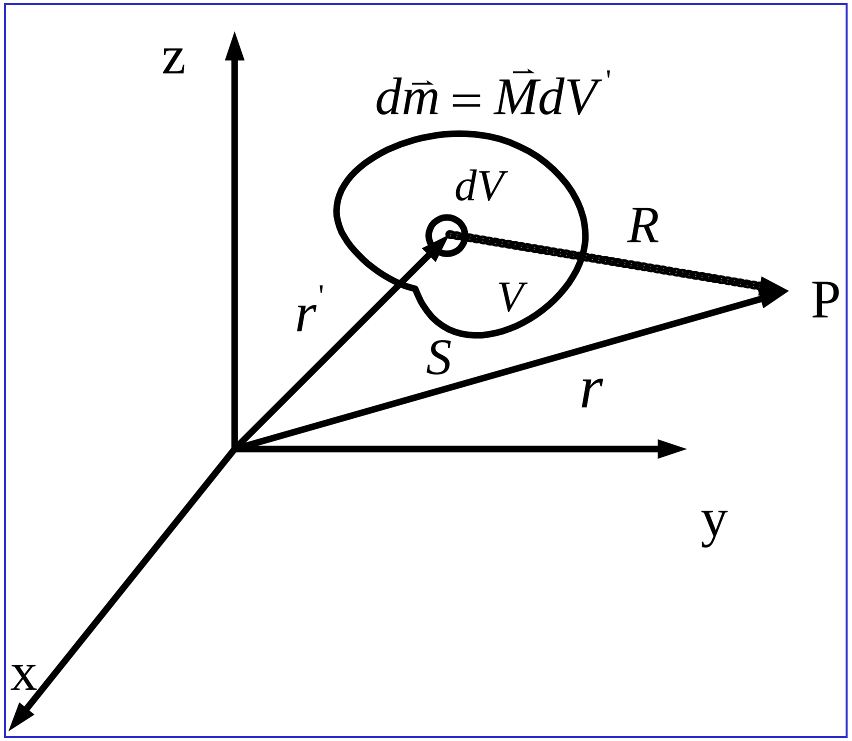
§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

二、磁化电流

也就是说将磁偶极距用等效的磁化电流来代替

$$d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$$

其中$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$



$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{M}\times\vec{R}}{R^3}dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{M}\times\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dV'$$

由$\nabla'\times\left(\frac{1}{R}\vec{M}\right)=\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{M}+\frac{1}{R}\nabla'\times\vec{M}$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

$$得\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{1}{R}\nabla'\times\vec{M}dV'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla'\times\left(\frac{1}{R}\vec{M}\right)dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{1}{R}\nabla'\times\vec{M}dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\vec{M}\times\hat{n}}{R}dS'$$

与体电流、面电流的矢量位公式比较可得

定义：等效的磁化体电流密度：$\vec{J}_m=\nabla\times\vec{M}$ $\quad\nabla\cdot\vec{J}_m=0$

等效的磁化面电流密度：$\vec{J}_{sm}=\vec{M}\times\hat{n}$

$\therefore$ 任何一个磁介质完全可以等效地看作是由磁化电流组成；

若磁化电流已知，可用毕奥—沙伐尔定律或矢量位直接求解

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

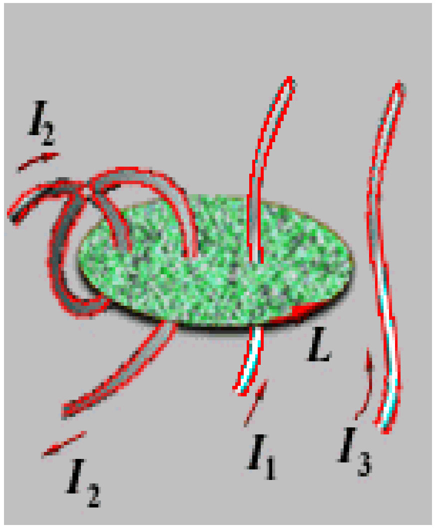
三、基本方程

由于不论是自由电流还是磁化电流从产生场的角度来看，地位完全是相同的，因此$\nabla\cdot\vec{B}=0$仍然成立

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{J}_f+\vec{J}_m)=\mu_0(\vec{J}_f+\nabla\times\vec{M})$$

$$\Rightarrow\nabla\times\frac{\vec{B}}{\mu_0}=\vec{J}_f+\nabla\times\vec{M}$$

$$\Rightarrow\nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\right)=\vec{J}_f$$



定义磁场强度$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\qquad(A/m)$

H 与**I** 成右螺旋关系

$$\Rightarrow\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f\Rightarrow\oint_l\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_f$$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

说明:

- 磁场强度的环量仅与环路交链的自由电流有关。
- 环路上任一点的磁场强度是由系统全部载流体产生的。
- 电流的正、负仅取决于环路与电流的交链是否满足右手螺旋关系，是为正，否为负。

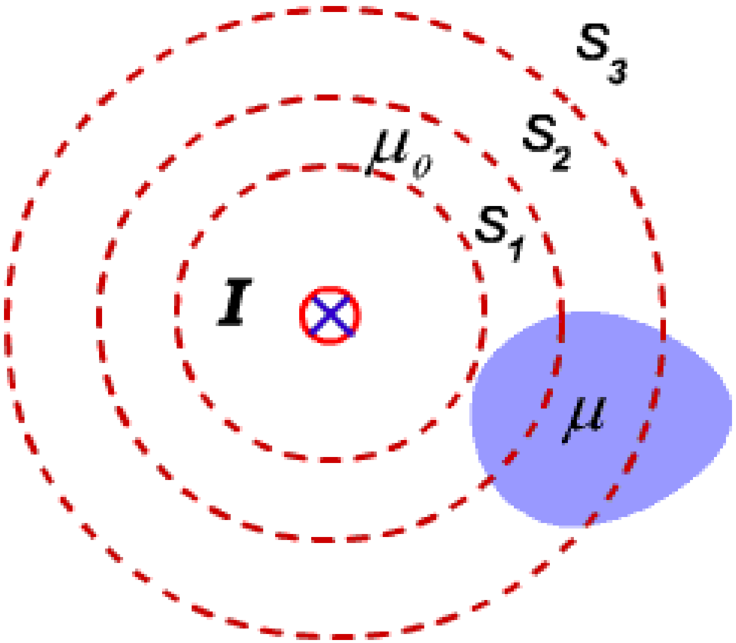
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

恒定磁场是有旋的

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

思考

图示中 $H_1 = H_2 = H_3$ 吗？它们的环量相等吗？



H 的分布与磁介质有关

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

$\vec{B}$和$\vec{H}$关系称为磁介质的本构关系$\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$

（注：有的书上$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\vec{M}$是因为它的$\vec{m}=\dfrac{\mu_0}{2}\int_V \vec{r}^{'}\times\vec{J}dV^{'}$）

分类：

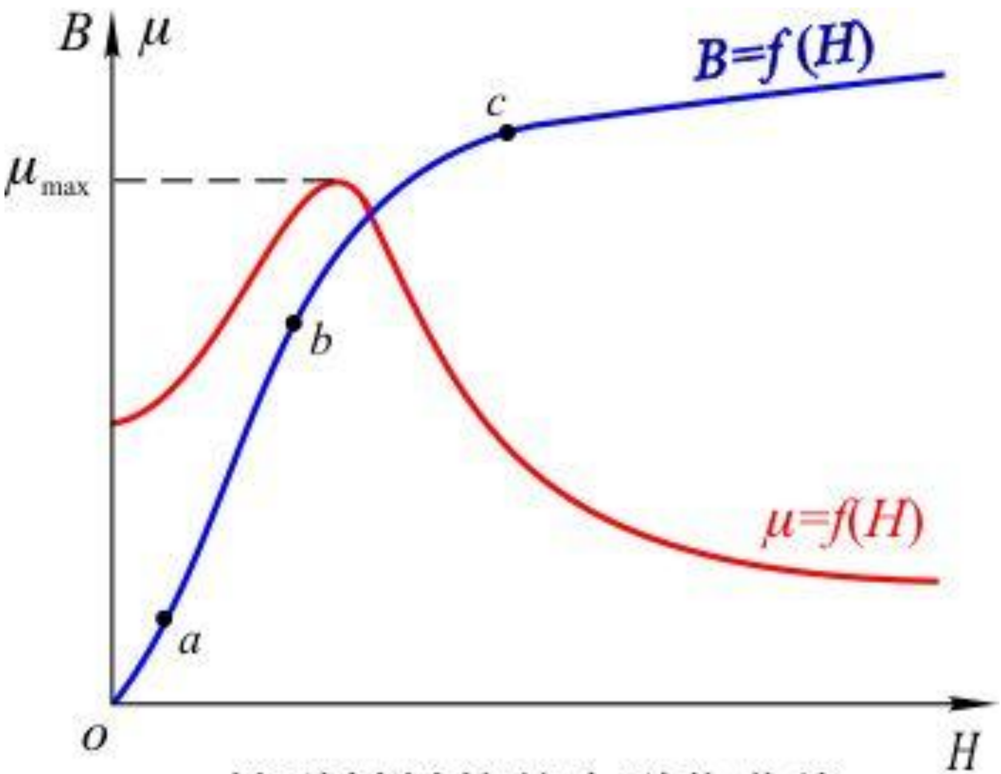
线性各向同性介质有$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$ χ_m为磁化率

$\vec{B}=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu\vec{H}$ μ_r为相对磁导率，μ为磁导率

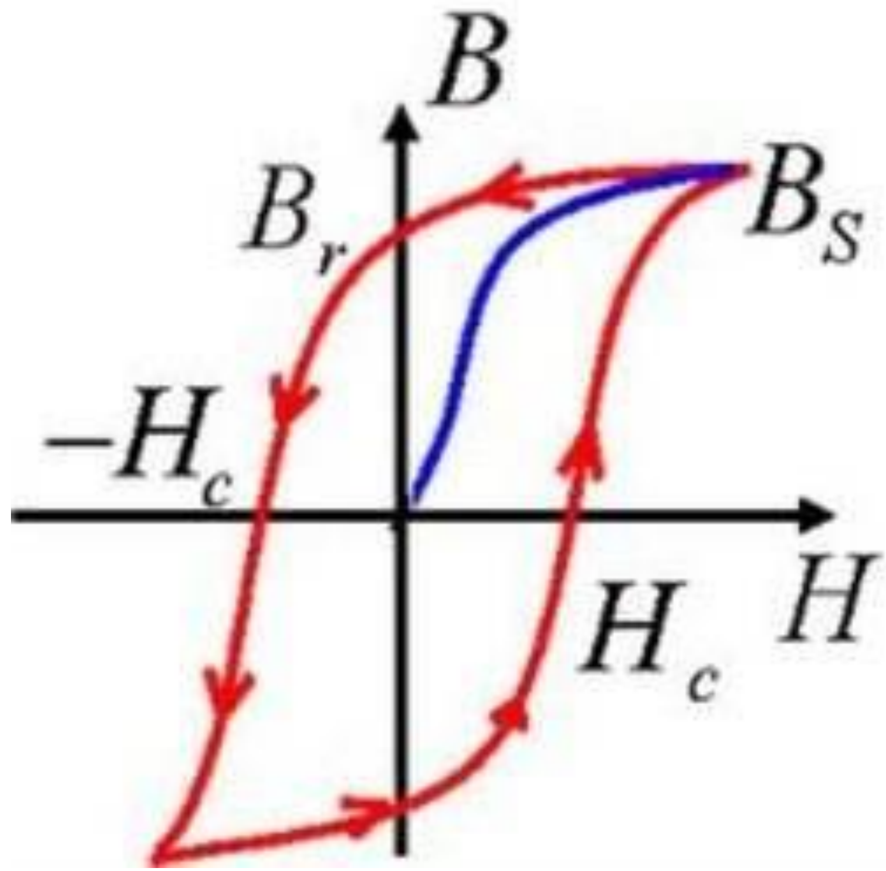
如：$\left.\begin{array}{l}\text{顺磁性}\chi_m>0,\ \mu_r>1\\ \text{抗磁性}\chi_m<0,\ \mu_r<1\end{array}\right\}\mu_r\approx 1$

各向异性，则χ_m为张量；均匀是指χ_m与空间坐标无关，反之为非均匀

非线性：铁磁性介质，其精确计算很复杂



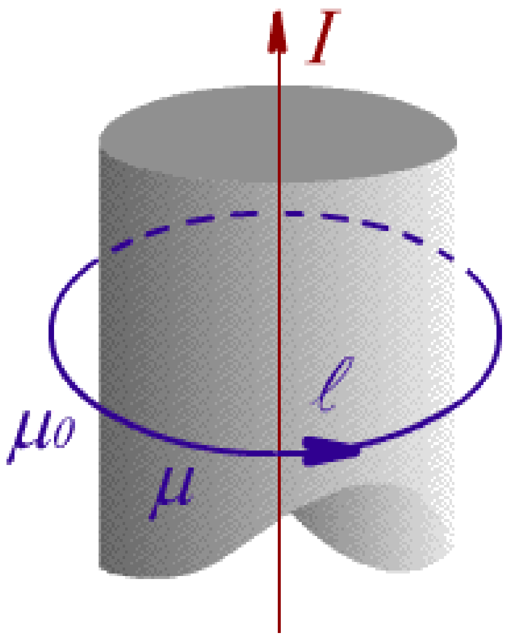
铁磁材料的基本磁化曲线



- 硬盘驱动器
- 磁通门磁力计
- 超导量子干涉仪
- 超流态

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

例：有一磁导率为μ，半径为 a 的无限长导磁圆柱，其轴线处有无限长的线电流I，圆柱外是空气（μ_0），如图所示。试求圆柱内外的$\vec{B}$，$\vec{H}$ 与 $\vec{M}$ 的分布。



解：磁场为平行平面场, 且具有轴对称性，应用安培环路定律，得

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi\rho H_\phi = I$$

磁场强度 $\vec{H} = \dfrac{I}{2\pi\rho}\hat{\phi} \qquad 0 < \rho < \infty$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

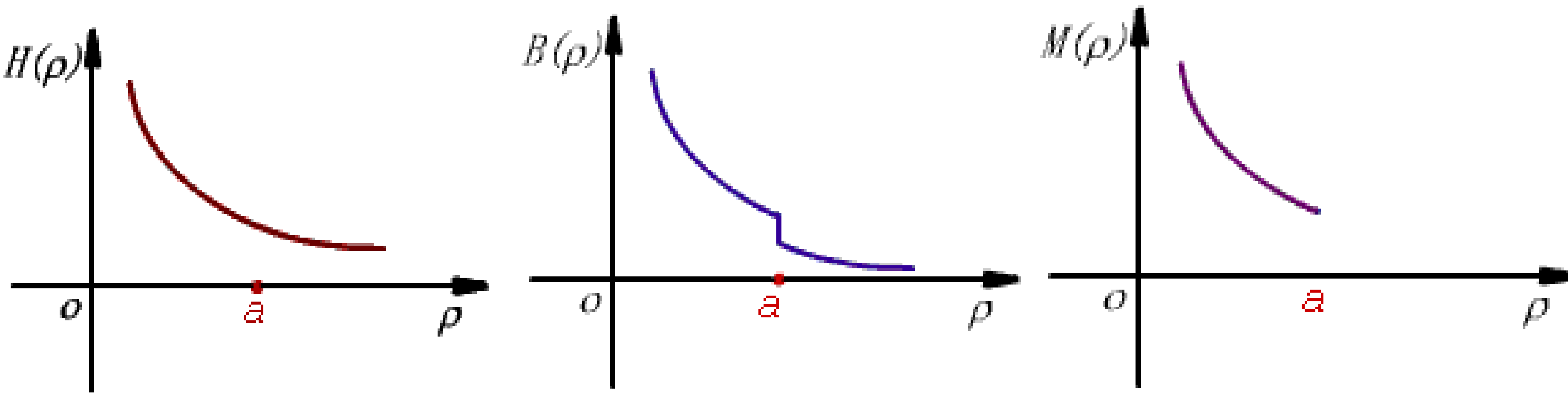
磁感应强度

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu I}{2\pi\rho}\hat{\phi} & 0 < \rho < a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & a < \rho < \infty \end{cases}$$

磁化强度

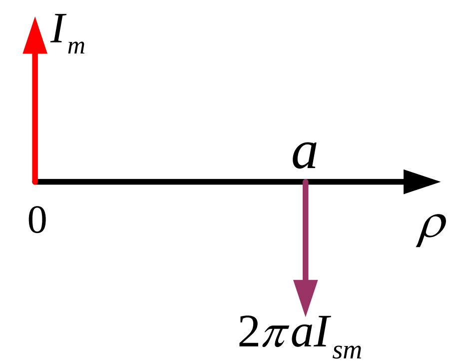
$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \begin{cases} \dfrac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \cdot \dfrac{I}{2\pi\rho}\hat{\phi} & \rho < a \\ 0 & a < \rho < \infty \end{cases}$$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场



思考

导磁圆柱内 $\rho = 0$ 处有磁化电流 I_m 吗？$\rho = a$ 处有面磁化电流 I_{sm} 吗？为什么？



§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

恒定磁场的基本方程表示为

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$ （磁通连续原理）

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_f$$ （安培环路定律）

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$ （无散）

$$\nabla\times\vec{H}=J_f$$ （有旋）

媒质的性能方程 $\vec{B}=\mu\vec{H}$

恒定磁场是有旋无散场，电流是激发磁场的涡旋源

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

例　试判断　$(a)\ \vec{F}_1 = ax\hat{y} + by\hat{x}$　$(b)\ \vec{F}_2 = a\rho\,\hat{\rho}$

能否表示为一个恒定磁场？

解：

$$(a)\quad \nabla\cdot\vec{F}_1 = \frac{\partial F_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{1y}}{\partial y}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$(b)\quad \nabla\cdot\vec{F}_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_{2\rho})$$

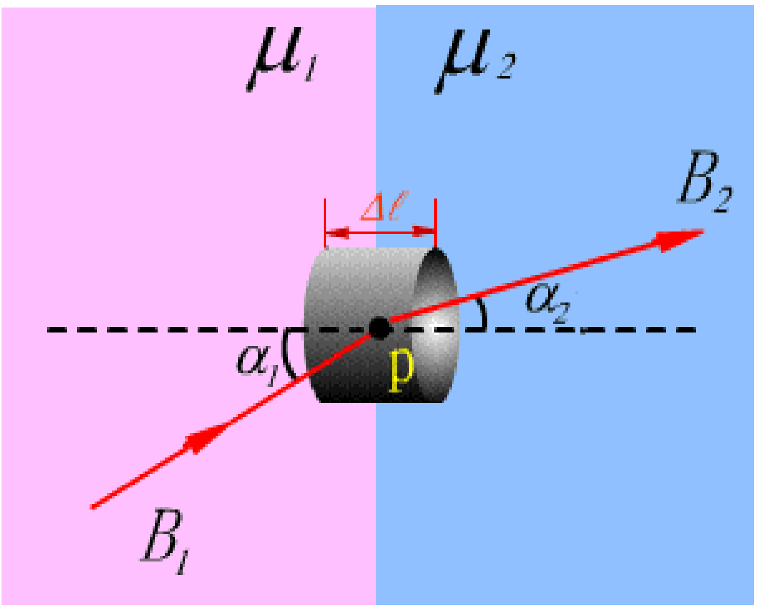
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a\rho) = 2a \neq 0$$

$\vec{F}_1$可能表示为恒定磁场。

$\vec{F}_2$不可能表示恒定磁场。

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

四、介质交界处的边界条件



分界面上 ***B*** 的衔接条件

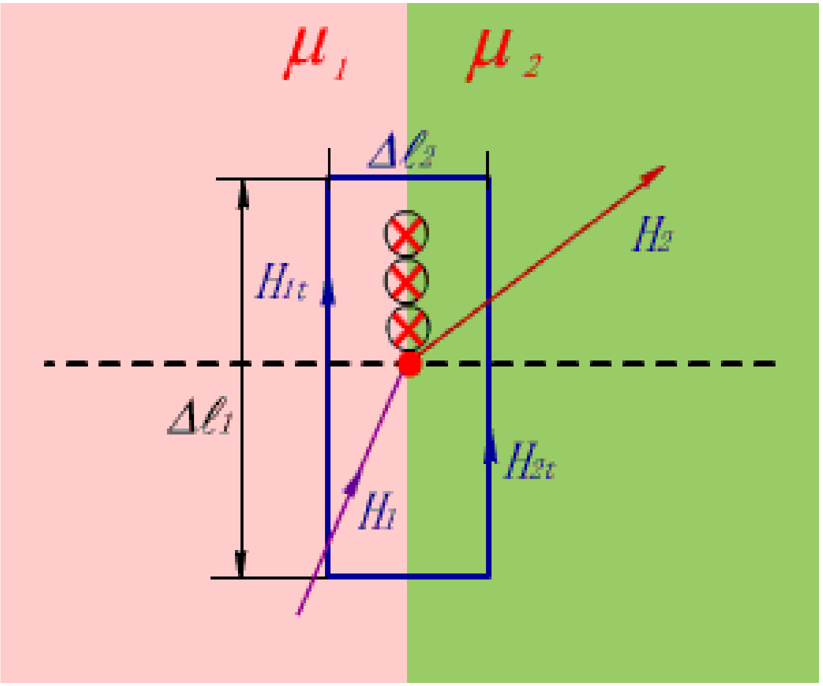
1. $\vec{B}$的衔接条件

在媒质分界面上，包围P点作一小扁圆柱，令 $\Delta l \to 0$ ，则根据$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$, 可得：

$$\boxed{\hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0}$$

$\vec{B}$的法向分量连续

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场



2.$\vec{H}$ 的衔接条件

在媒质分界面上，包围P点作一矩形回路l，令 $\Delta l_2 \to 0$ 根据$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_f$,可得

$$H_{1t}\Delta l_1 - H_{2t}\Delta l_1 = J_{fs}\Delta l_1$$

分界面上 ***H*** 的衔接条件

$$\hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_{fs}$$

$\vec{H}$的切向分量不连续

当 $\vec{J}_{fs} = 0$

$$\hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

$\vec{H}$的切向分量连续

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

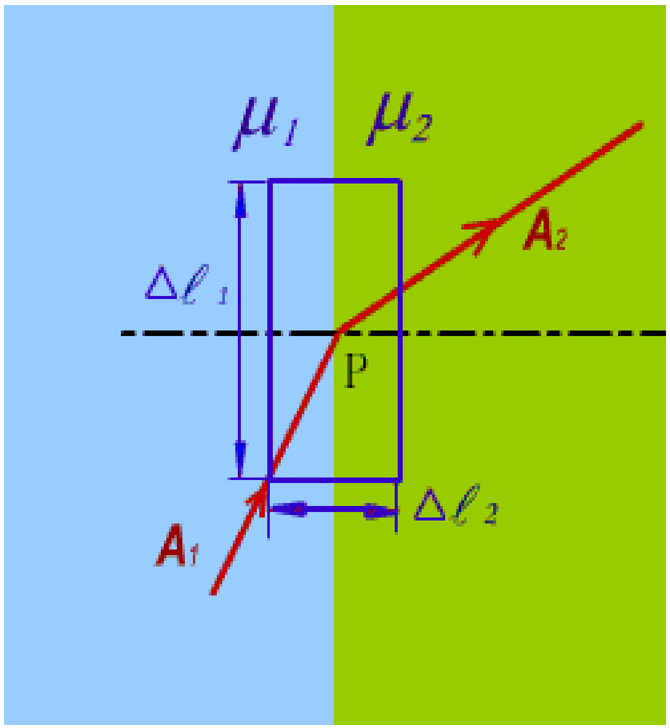
3. 交界处的磁化电流 $\vec{J}_{ms}$

$$\because \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \hat{n} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{M}_2 - \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} + \vec{M}_1\right) = \vec{J}_{fs}$$

$$\Rightarrow \hat{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0(\vec{J}_{fs} + \vec{J}_{ms}) \Rightarrow \vec{J}_{ms} = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \times \hat{n}$$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

4. 在分界面上的衔接条件



a）围绕 P点作一矩形回路，则

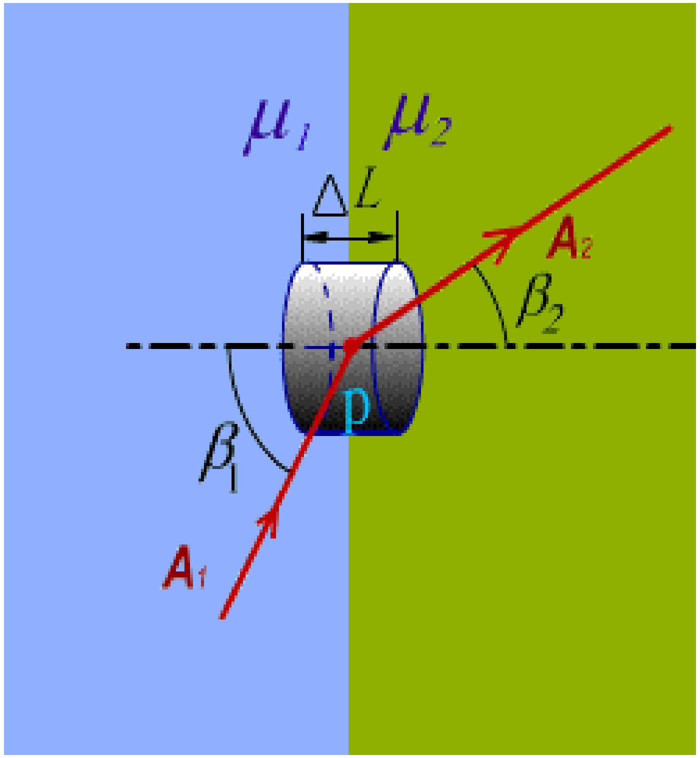
$$\Phi = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_s (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

$$= \oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

当 $\Delta L_2 \to 0$ 时，$\Phi_m \to 0$，$\oint_l \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = 0$，即

$$A_{1t} = A_{2t}$$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场



b）围绕P点作一扁圆柱，则

$$\oint_s \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}dV = 0$$

当$\Delta h \to 0$ 时，$-A_{1n}\Delta S + A_{2n}\Delta S = 0,$

即

$$A_{1n} = A_{2n}$$

综合两个结论，有

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2$$

表明在媒质分界面上磁矢位$\vec{A}$是连续的。

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

5. 线性各项同性介质中的磁化电流

$$\left(\begin{array}{l}\text{同线性各项同性介质中的极化电荷一样，若}\rho_f = 0 \Rightarrow \rho_b = 0, \\ \text{只有极化面电荷}\end{array}\right)$$

即在线性各项同性介质中的磁化电流只存在于介质交界面及介质中电流不为零的地方

证：$\vec{J}_m = \nabla\times\vec{M} = \chi_m\nabla\times\vec{H} = \chi_m\vec{J}_f = (\mu_r - 1)\vec{J}_f$

若 $\vec{J}_m \neq 0$，则 $\vec{J}_m + \vec{J}_f = \mu_r\vec{J}_f \begin{cases}\text{如果顺磁性则总电流增加} \\ \text{如果抗磁性则总电流减小}\end{cases}$

若 $\vec{J}_m = 0$，则 $\vec{J}_m = 0$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

6. 磁荷的概念

磁荷在物理上不存在或者说未发现，所以只能在数学上讲

磁荷：某一磁学量（物理量或数学量）的通量源

（并无统一的概念）

即若存在$\nabla\cdot\vec{A}=f\neq 0$，则称$f$为磁学量$\vec{A}$的磁荷

则$\vec{A}$的表达式可写为：

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\{\int_V \frac{\vec{J}}{R}dV' + \int_V \frac{f(\vec{r}\,')\vec{R}}{R^3}dV'\}$$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

1 磁位 φ_m 的引出

恒定磁场无电流区域

$$\nabla\times\vec{H}=0 \rightarrow \boxed{\vec{H}=-\nabla\varphi_m} \rightarrow \boxed{\varphi_m \vec{H}\cdot d\vec{l}}$$

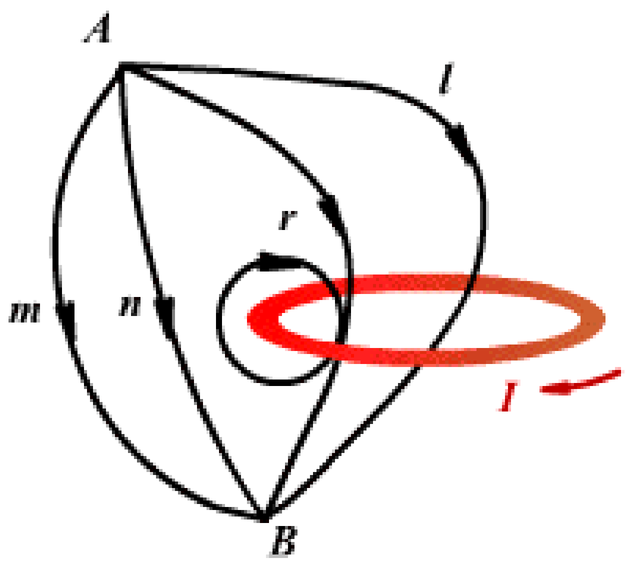
φ_m——标量磁位，简称磁位（Magnetic Potential），单位：A（安培）。

磁位 φ_m 的特点：

- 磁位 φ_m 仅适合于无自由电流区域，且无物理意义。
- 等磁位面（线）方程为 φ_m =常数，等磁位面（线）与磁场强度 $\vec{H}$ 线垂直。

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

- φ_m 的多值性



在恒定磁场中，

设B 点为参考磁位，则

$$\varphi'_{mA} = \int_{AlB} \vec{H} \cdot d\vec{l} \,, \qquad \varphi''_{mA} = \int_{AmB} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

由安培环路定律，得

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{AlBmA} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{AlB} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{BmA} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$= \varphi'_{mA} - \varphi''_{mA} = I$$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

推出 $\varphi'_{mA}=\varphi''_{mA}+I$ 多值性

为了克服φ_m多值性，规定积分路径不得穿过从电流回路为周界的 S 面（磁屏障面）。这样，φ_m 就成为单值函数，两点之间的磁压与积分路径无关。

φ_m满足的方程：定义等效磁荷体密度为$\rho_m=-\nabla\cdot\vec{M}$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\mu_0\nabla\cdot\left(\vec{H}+\vec{M}\right)=0\Rightarrow\nabla\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M}\\ \nabla\times\vec{H}=0\Rightarrow\vec{H}=-\nabla\varphi_m\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\nabla^2\varphi_m=-\rho_m$$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

边界条件：

①$\vec{M}$给定（永久极化）

$$\begin{cases} \hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \Rightarrow \hat{n}\cdot(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\hat{n}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2)=\rho_{ms} \Rightarrow \dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}-\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}=\rho_{ms} \\ \hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0 \Rightarrow \varphi_{m1}=\varphi_{m2} \end{cases}$$

②线性均匀各项同性介质（外加磁场的场源在无限远处）

（a）介质内部$\rho_m=-\nabla\cdot\vec{M}=-\dfrac{\chi_m}{\mu}\nabla\cdot\vec{B}=0$

$$\Rightarrow \nabla^2\varphi_m=0$$

（b）介质交界处

$$\begin{cases} \varphi_{m1}=\varphi_{m2} \\ \mu_1\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}\text{（或}\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}-\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}=\rho_{ms}) \end{cases}$$

比较内容 \ 位函数	电位（φ）（有源或无源）	磁位（φ_m）（无源）
引入依据	$\nabla\times\vec{E}=0$	$\nabla\times\vec{H}=0$
位与场的关系	$\vec{E}=-\nabla\varphi$ $\varphi=\int_{p}^{0}\vec{E}\bullet d\vec{l}$	$\vec{H}=-\nabla\varphi_m$ $\varphi_m=\int_{p}^{0}\vec{H}\bullet d\vec{l}$
极化电荷、磁荷	$\rho_b=-\nabla\bullet\vec{P}(r)$	$\rho_m=-\nabla\cdot\vec{M}$
本构关系	$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$	$\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$
满足的方程	$\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho+\rho_b}{\varepsilon_0}$	$\nabla^2\varphi_m=-\rho_m$
交界处边界条件	$\varphi_1=\varphi_2$ $\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\rho_{sf}$	$\varphi_{m1}=\varphi_{m2}$ $\mu_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\mu_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\rho_{ms}$